GOLDBACH SEJT… ÉS?

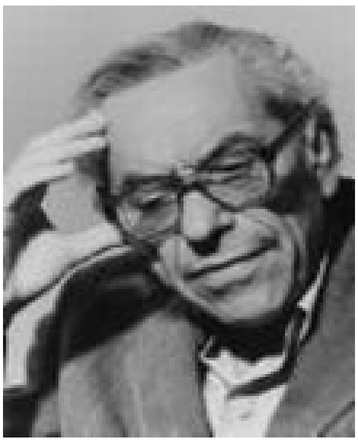
Klopfer Ervin

ÖSSZEFOGLALÓ

A Goldbach-sejtés (GC) egyike a számelmélet legrégebbi, megoldatlan problémájának. Modern formájában azt állítja, hogy minden kettőnél nagyobb páros szám két prím összege. Nagyon egyszerűnek tűnő kijelentés, de bizonyítása közel 270 éve kifogott a matematikusokon. Az elmúlt évszázadok során sok részeredmény született. Rényi Alfréd és Pintz János magyar matematikusok is foglalkoztak a Goldbach-sejtéssel. A GC megoldásra jelentős pénzösszeget is kitűztek, de a kérdés máig nyitott. Lehetséges, hogy a GC-t egyáltalán nem tudják bizonyítani.

SUMMARY

The Goldbach's Conjecture (GC) is one of the oldest unsolved problems in number theory. In its modern form it states that every even number larger than two can be expressed as a sum of two prime numbers. It seems that this statement is very simple but its proof has been unsolved for nearly 270 years. Many partial solutions were born during the last couple of centuries. Hungarian mathematicians Alfréd Rényi and János Pintz also dealt with Goldbach's Conjecture. For the solution of the GC-problem a lot of money was offered but the GC has remained unsolved. Possibly there is no solution for the proof of the GC.



1. ábra
Erdős Pál (1913-1996)

SEJTÉSEK

Mottó:
„Sejts és bizonyíts!” (Erdős Pál)

A *sejtések* a matematika történetében meghatározó jelentőségűek voltak. *Erdős Pál* (1913-1996), a világhírű, magyar matematikus, „prímember” és „világegyetemi tanár” (**1. ábra**) mondta: *„Egy jó sejtés gyakran többet ér, mint egy szép bizonyítás”.*

Az alábbiakban felsorolunk néhány nevezetes matematikai sejtést:

- Nagy Fermat sejtés. A sejtést *Pierre de Fermat* (1601-1665) francia matematikus fogalmazta meg 1637-ben, amely szerint két n-edik hatvány összege soha nem lehet n-edik hatvány, ha $n > 2$. A bizonyítást 1995-ben *Andrew John Wiles* amerikai matematikus adta meg, de levezetése hibát tartalmazott, amelyet 1997-re *Richard Taylor*ral közösen sikerült kiküszöbölnie, így a sejtés *tétel* szintjére emelkedett.
- Goldbach-sejtés. 1742-ben fogalmazta meg *Christian Goldbach* porosz matematikus, majd *Leonhard Euler* pontosította. A bizonyítás máig várat magára; a továbbiakban ennek a sejtésnek a történetével foglalkozunk.
- Négyszín-sejtés, amelyet 1852-ben fogalmazott meg *Francis Guthrie* (1831-1899) angol matematikus, ügyvéd és botanikus. A sejtés azt állítja, hogy minden térkép négy színnel kiszínezhető úgy, hogy azonos színű területek ne érintkezzenek. A sejtés egzakt módon nem bizonyított, de 1976-ban *Kenneth Appel* és *Wolfgang Haken* amerikai matematikusok számítógépes bizonyítást adtak, amelyet azonban a matematikusok egy része máig nem fogadott el, mondván: *„a szilícium logikája nem azonos a neuronok logikájával”.*
- Riemann-hipotézis. 1859-ben fogalmazta meg *G.F. Bernhard Riemann* (1826-1866) német matematikus. E szerint a Riemann-féle egyváltozós, komplex zeta függvény minden nem triviális gyökének valós értéke ½. A sejtés máig nem bizonyított (lásd később).

PRÍMSZÁMOK

Mottó:

„A tudományok királynője a matematika, és matematika királynője a számelmélet”
(Carl Friedrich Gauss)

„A prímek világítótornyok a számok tengerében”

E cikk témája matematika, ezen belül is számelmélet. A számelmélet tárgya az egész számok Z gyűrűje, amelyben az összeadás, kivonás és a szorzás korlátozás nélkül elvégezhető, de az *osztás nem!* A számelmélet alapvetően az oszthatóságot vizsgálja; fő „munkaeszközei” a prímszámok és a maradékok. A számelméletnek azt az ágát, amely az egész számoknak prímszámokból – összeadás vagy kivonás útján – történő előállításával foglalkozik, *additív számelméletnek* nevezik. A Goldbach-sejtés alapvetően additív számelméleti probléma.

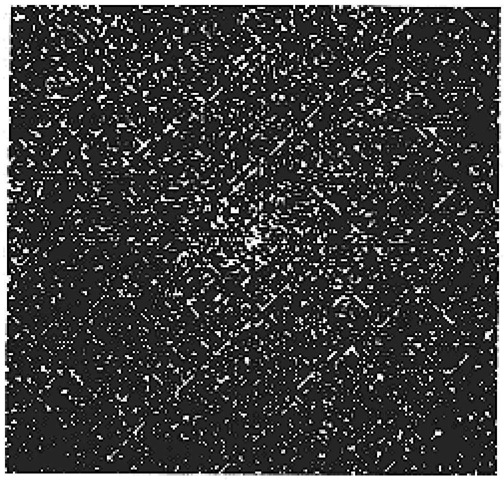
A prímszámok (törzsszámok) *hétköznapi* definíciója szerint prímszám az a pozitív egész szám, amelynek az 1-en *és* önmagán kívül nincs osztója. Ez a definíció azonban nem pontos, mert ennek alapján az 1 is prímszám lenne. Az 1 azonban – per definitionem – nem prím, mivel csak *egyetlen* osztója van, önmaga. Az *egzakt* matematikai definíció úgy szól, hogy *„prímszám az olyan pozitív egész szám, amelynek pontosan kettő darab pozitív osztója van; sem több, sem kevesebb”.*

Valamennyi egynél nagyobb szám vagy prím, vagy ún. *összetett* (kompozit) szám. Egyetlen páros prím van, a 2; ez egyben a legkisebb prímszám. A prímek a természetes számok építőkövei, azaz minden természetes szám – a tényezők sorrendjétől eltekintve – egyértelműen felírható prímszámok szorzataként (kanonikus alak); ez a *számelmélet alaptétele.* Végtelen sok prímszám van; erre *alexandriai Euklidész* (kb. i. e. 365-300) görög matematikus minden idők egyik legszebb matematikai bizonyítását adta. A prímszámok megtalálására *Eratosztenész* (i. e. 276-196) görög matematikus és csillagász adott egy roppant egyszerű módszert, ez az ún. Eratosztenész-szita. A szita-módszer számítógépes programmal könnyen futtatható, de lassú.

*Bolyai János*t (1802-1860), a kiváló magyar matematikust már fiatalon érdekelték a prímek. *„Már kisgyermek koromban* – írja – *feltettem magamnak a kérdést, hogy végtelen sok prímszám létezik-e?”* A számelmélet iránti vonzódása egész életében elkísérte. *„Az egész számtan mezején* – vallja egy másik helyen – *alig van szebb és érdekesebb, mint a prímszámok oly mély homályba rejlő titka.”* Hosszú ideig keresett olyan eljárást, amelynek segítségével bármely törzsszám zárt képlettel kifejezhető. Ilyen formulánk máig nincsen.

Már a 18. sz. végére prímtáblázat készült 4×10^5-ig, amelyet 1817-re kiterjesztettek 3×10^6-ig. Az 50-nél kisebb prímek: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47; összesen 15 darab. 1000-ig 168 darab, 1.000.000-ig 78.498 darab prím található.

A prímek a számelmélet középpontjában állnak. Miként a vegyi elemek a kémia, a szubatomi részecskék a fizika, úgy a prímek az egész számok „építőkövei”. De míg az elemek és a részecskék száma – mai tudásunk szerint – véges, a prímek végtelen sokan vannak, és teljesen szabálytalanul helyezkednek el a természetes számok halmazában (**2. ábra**). Az ábra megalkotója *Stanisław Ulam* (1909-1986) lengyel származású amerikai matematikus, a Manhattan Project és a H-bomba kifejlesztésének egyik kulcsfigurája, *Teller Ede* munkatársa volt.



2. ábra
Számítógép által készített ún. Ulam-spirál a prímek (fehér pontok) eloszlásáról 1-65.000-ig

A prímszámok fogalmát – minden valószínűség szerint – már az ókorban ismerték. Az egyik legrégebbi matematikai leletet Zairében (Kongói Demokratikus Köztársaság), az Edward-tó menti Ishango-ban találták. Ez egy csontdarab – talán szerszámnyél –, amelyet berovátkoltak, és a végébe egy kvarcdarabot erősítettek; véséshez vagy íráshoz használhatták. Készítésének ideje i. e. 9000-6500 közé esik. Az egyik oldalán 11 - 13 - 17 - 19 rovátka van, ami azt sugallja, hogy készítői ismerték a törzsszámokat. Valószínűsíthető, hogy a prímeket az egyiptomiak és mezopotámiaiak is ismerték, de részletesebben először csak a pitagoreusok foglalkoztak velük.

GOLDBACH ÉLETE

Christian Goldbach (1690-1764) porosz történész és amatőr matematikus a Balti-tenger közelében, a Pregel (Pregolja) folyó partján fekvő – akkor porosz – Königsbergben (ma az Oroszországhoz tartozó Kalinyingrád) született; apja protestáns lelkipásztor volt. A Königsbergi Egyetemen némi matematikát, de főleg jogot és orvoslást tanult. 1710-ben beutazta Észak-Európát, Németországot, Ausztriát, Angliát, Itáliát, és találkozott kora legkiválóbb matematikusaival. *Leibniz*-cel 1711-ben találkozott Lipcsében; utána 2 évig leveleztek latinul. 1712-ben, Angliában találkozott *Nicholas (I) Bernoulli*-val és *de Moivre*-val*,* Velencében *Nicolaus (II) Bernoulli*-val, és elkezdett levelezni annak testvérbátyjával, *Daniel (I) Bernoulli*-val, amelyet 7 évig folytatott. 1724-ben tért vissza Königsbergbe, ahol kapcsolatba került *Georg Bernhard Bilfinger*-rel és *Jakob Hermann*-nal, akik nagy hatással voltak rá. 1720-1729 között számos matematika tárgyú cikket publikált. 1725-ben – Riga-i tartózkodása alatt – folyamodott állásért a Szentpétervári Birodalmi Akadémiára (a későbbi Szentpétervári Tudományos Akadémiára), amelynek 1725 decemberében matematika és történelem professzora, majd 1725-1728 között titkára lett. *Leonhard Euler* (1707-1783) 1727-ben érkezett Pétervárra; Goldbach-al való levelezésük 1729-ben kezdődött és 35 évig tartott. Goldbach 1728-ban Moszkvába ment és nevelője lett Péter cárevicsnek, a későbbi *II. Péter* cárnak (1728-1732). Goldbach 1734-ben visszatért Pétervárra, majd 1742-től Moszkvában külügyminisztériumi tisztviselő. Jelentős eredményeket ért el a számelmélet, a végtelen sorok összegezése, a görbék és egyenletek elméletében. Eulerhez és Daniel Bernoullihoz összesen mintegy 200 levelet írt.

A GOLDBACH-SEJTÉS SZÜLETÉSE

Mottó:

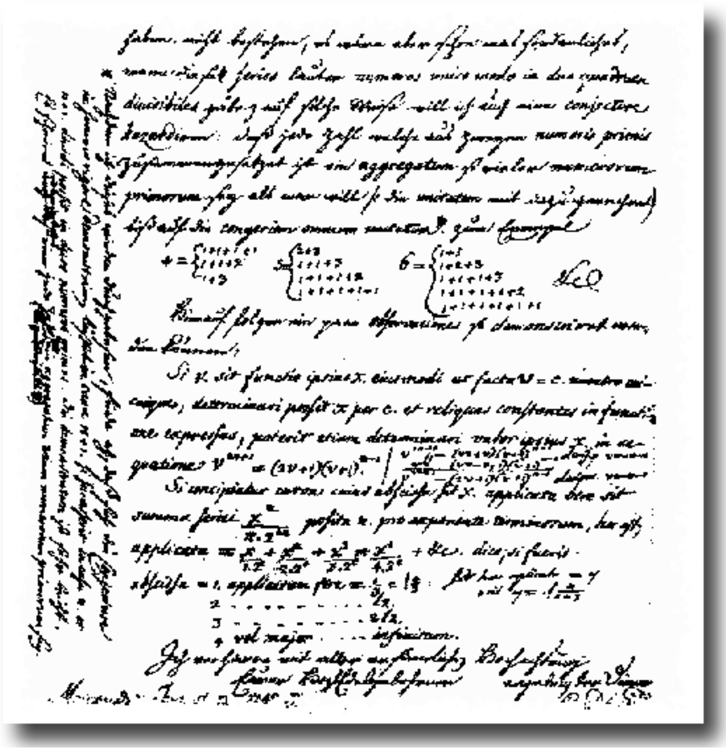
„Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maitre à tous"
(Olvassátok Eulert, olvassátok Eulert;
Ő mindenben a mi mesterünk,
Pierre Simon de Laplace)

„Mathematicus nascitur, non fit"
(Matematikust nem lehet képezni,
matematikusnak születni kell)

„Imagination is more important than knowledge"
(A képzelet sokkal fontosabb, mint a tudás, Albert Einstein)

„Every even number is the sum of two primes and every marriage is the sum of two individuals"
(Minden páros szám két prím, minden házasság
két egyéniség összege, Mansur Darlington)

A Goldbach-sejtés egyike a matematika (ezen belül a számelmélet) egyik legnehezebb, legrégebben nyitott és legtöbbet tanulmányozott problémájának.



3. ábra
Christian Goldbach nevezetes sejtését tartalmazó levele Leonhard Eulerhez

Christian Goldbach –, akit néhol németként, máshol oroszként is emlegetnek – főleg Szentpétervárott és Moszkvában élt és dolgozott. 1742. június 7-én Moszkvából azt írta Leonhard Eulernek Berlinbe, hogy: *„Legalábbis úgy tűnik, hogy minden 2-nél nagyobb szám három prímszám összege”* (Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sey, **3. ábra**) [20]. Megjegyzendő, hogy Goldbach – és az ő korában minden matematikus – az 1-et is prímnek tekintette. Az eredeti Goldbach-sejtés mai – kissé módosított – alakja: *„Minden 5-nél nagyobb páratlan szám – legalább egyféle módon – felírható három prím összegeként”.*

Euler (**4. ábra**) 1742. június 30-án azt válaszolta Berlinből, hogy ennek bizonyításához elegendő belátni, hogy *„minden 2-nél nagyobb páros szám felbontható két prímszám összegére”*, vagyis $2n = P_1 + P_2$, ha $n > 1$. Természetesen megengedett a $P_1 = P_2$ is. Ez az ún. „páros Goldbach-sejtés”, amelyet „erős Goldbach-sejtés”-nek (strong GC, sGC) vagy „kettős Goldbach-sejtés”-nek (bináris GC) is neveznek. Euler még hozzátette; úgy véli, hogy az állítás igaz (bár nem tudta bizonyítani). A két prímre való felbontás általában többféle módon is elvégezhető, pl.: 4 = 2+2; 6 = 3+3; 8 = 3+5; 10 = 3+7 = 5+5; 120 = 7+113 = 11+109 = 13+107 = 17+103 = 19+101 = 23+97 = 31+89 = 37+83 = 41+79 = 47+73 = 53+67 = 59+61.

4. ábra
Leonhard Euler (1707-1783), minden idők egyik legnagyobb matematikusa, a Goldbach-sejtés végső megfogalmazója

Euler gondolatmenete Goldbach eredeti sejtésére könnyen reprodukálható. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$, vagyis $2n \geq 4$. Ekkor igaz, hogy $2n + 2 \geq 6$, és Goldbach szerint ez a páros szám $2n + 2 = P_1 + P_2 + P_3$. Mivel azonban három páratlan prím összege páratlan, így az egyik – mondjuk a P_3 – páros prím kell legyen, amely *csak a 2* lehet. Vagyis $2n = P_1 + P_2$, így igaz, hogy *„minden páros szám két prím összege”*. Tehát nem Goldbach, hanem Euler fogalmazta meg a sejtés végleges formáját, amely ma Goldbach nevét viseli.

Hongbo Li (Mathematics Mechanization Research Center, Institute of Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, Peking) meghatározása szerint (1999), azokat a pozitív (páros) egész számokat, amelyek előállnak, mint *két páratlan prím összege*, Goldbach-számoknak nevezzük. Pl.: 6=3+3; 18=5+13; 36=7+29; stb.

Mint látható, Goldbach a sejtést Eulerhez írt levelének margójára írta. Úgy látszik, hogy a margók a matematikai sejtések megfogalmazásában gyakran kapnak jelentős szerepet, így pl. a Nagy Fermat sejtés, amely – mint fentebb láttuk – Sir Andrew John Wiles 1997-es, kijavított bizonyítása óta már *tétel.* A Nagy Fermat sejtést Fermat Diophantosz „Arithmetica” című – 1670-ben Toulouse-ban kiadott – könyvének margójára jegyezte le. Goldbach Eulerhez írt levelét először 1843-ban *Pavel Nyikolajevics Fussz* (1797-1855) orosz matematikus tette közzé. [10]

A Goldbach-sejtés legegyszerűbb formájában tehát így hangzik:

„MINDEN KETTŐNÉL NAGYOBB PÁROS SZÁM KÉT PRÍM ÖSSZEGE”

Egy kissé pontosabban: „Minden kettőnél nagyobb páros szám – legalább egyféleképpen – előáll, mint két – nem szükségszerűen különböző – prím összege”.

Ez az állítás nagyon ártatlannak tűnik – egy kisiskolás is megérti – azonban közel 270 éve kifogott minden matematikus bizonyítási kísérletén, és sokat az őrületbe kergetett [1]. A sejtést mindeddig nem bizonyította, de nem is cáfolta meg senki. Az erős GC természetesen úgy is megfogalmazható, hogy *„minden egynél nagyobb egész szám két prím számtani közepe”,* hiszen ha $2n = P_1 + P_2$, akkor $n = (P_1 + P_2)/2$.

Érdekes Euler 1751-ben írt véleménye a prímszámokról: *„A matematikusok hiába kutattak, hogy fel tudjanak fedezni valami rendszert a prímszámok sorozatában, és jó alapja van annak, hogy azt higgyük, ez misztérium, amit sohasem fog az emberi agy megérteni. Ahhoz, hogy erről meg tudjunk győződni, elég szemeinket a prímszámok táblázatára vetni: néhány ember vette a fáradságot és 100 ezrekig számolt, hogy sorba állítsa őket, és nem látott benne semmi törvényt. A legmeglepőbb ebben az aritmetikában az, hogy sok olyan biztos szabállyal* *látott el bennünket, amelyek segítségével az ilyen számok sorozatát folytathatjuk olyan messzire, amennyire akarjuk, anélkül, hogy valami nyomát találnánk köztük valamilyen szabálynak".*

A probléma azért olyan különösen nehéz, mert az egész számok *multiplikatív* és *additív* struktúrája együtt szerepel a GC-ben. Ugyanis a prímszámok a *szorzásra* nézve *elemi építőkövekként*, „atomok"-ként viselkednek; minden egynél nagyobb egész szám vagy prím, vagy – a tényezők sorrendjétől eltekintve – egyértelműen felírható *prímszámok szorzataként*. Az *összeadásra* nézve pedig az egész számok szerkezete nagyon egyszerű; az *egy ismételt összeadásával* minden egész szám megkapható.

Az sGC enyhébb formája a „páratlan Goldbach-sejtés" („hármas Goldbach-sejtés", „gyenge Goldbach-sejtés", weak GC [wGC] vagy „három prím probléma"), amely szerint: *„minden 7-nél nagyobb páratlan szám felírható, mint három páratlan prím összege".* Pl: 9=3+3+3; 11=3+3+5; 59=17+19+23; 103=3+47+53; 111=3+11+97; 117=17+29+71; 189=41+59+89 stb. Fenti állítással egyenértékű az a megfogalmazás, hogy *„minden 5-nél nagyobb páratlan szám előáll, mint három prím összege"* (lásd fentebb). Bár egyik sejtést sem sikerült igazolni, a wGC valószínűleg könnyebben megoldható, mint az sGC. Ha az erős GC-t sikerülne megoldani, ezzel automatikusan megoldódna a gyenge GC is, de ez megfordítva nem igaz.

VARIÁNS SEJTÉSEK

A Goldbach-sejtésre alapozva más, *variáns sejtések* is születtek, pl.:

(1) minden $2n \geq 6$ páros szám *két páratlan* prím összege (pl.: 6 = 3+3; 18 = 7+11).

(2) minden $n > 5$ páratlan szám felírható, mint *egy páratlan prím plusz egy prím kétszerese.* A sejtést – a wGC alapján (n = p + q + r) – eredetileg *Émile Lemoine* [1840-1912] francia matematikus fogalmazta meg 1894-ben, mondván: ha n páratlan, akkor felírható $2p + q$ alakban. *Hyman Levy* [1889-1975] skót matematikus 1963-ban szigorította Lemoine sejtését; $n = 2p + q$, és $p > q$. Azóta Levy-sejtés a neve. Pl.: 17=3+(2×7); 47=13+(2×17); 51=5+(2×23) stb. A Levy-sejtés tehát a gyenge Goldbach-sejtés egy változata, amelyet $n \leq 10^9$-ig számítógéppel igazoltak.

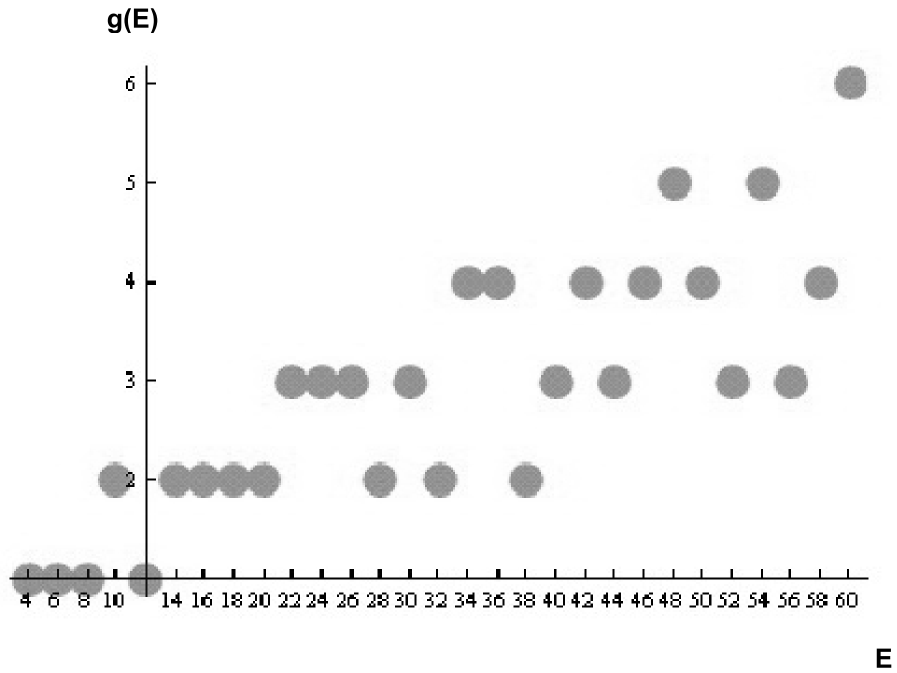
(3) minden $n > 17$ egész szám pontosan *három különböző* prím összege, pl.: 25=3+5+17; 32=2+7+23. *Andrzej Schinzel* mutatta meg, hogy a GC *ekvivalens* ezzel a sejtéssel.

(4) minden páros szám két *egymást követő prím* különbsége. Pl.: 2=5–3=7–5=13-11=31-29; 4=11-7; 6=29–23=37–31; 8=97–89; 10=191–181=251–241; 12=479–467; 14=331-317; stb. (*Alphonse de Polignac,* 1849).

Egyébként *René du Peron Descartes* (1596-1650) francia matematikus, fizikus és filozófus már jóval Goldbach és Euler előtt ismerte a ma GC-nek nevezett problémát, és egy – posztumusz közzétett – levelében említette. Bár nem volt teljesen meggyőződve róla, de így fogalmazott: *„Minden páros szám egy, kettő vagy három prím összege".* Pl: 2=2=1+1; 4=2+2=1+1+2; 6=3+3=1+5=2+2+2; 8=3+5=1+2+5; 10=5+5= =2+3+5; 12=5+7=2+5+5; stb. Descartes is prímnek tekintette az 1-et. Erdős Pál azt mondta: *„Jobb, hogy a sejtést Goldbach után nevezték el, mivel matematikus nyelven szólva Descartes végtelenül gazdag, Goldbach pedig nagyon szegény volt".*

Egy páros szám két prímre való felbontása (partíció) $2n = P_1 + P_2$ – általában – sokféle módon lehetséges. Alább néhány példát adunk páros számok (2n = E) két prím összegére való felbontásának lehetőségeiről [g(E)]:

E = 4 = 2+2	g(4) = 1
E = 6 = 3+3	g(6) = 1
E = 8=3+5	g(8) = 1
E = 10=3+7=5+5	g(10) = 2
E = 12 = 5+7	g(12) = 1
E = 24=5+19=7+17= =11+13	g(24) = 3
E = 34=3+31=5+29= =11+23=17+17	g(34) = 4
E = 48=5+43=7+41= =11+37=17+31=19+29	g(48) = 5
E = 60=7+53=13+47= =17+43=19+41= =23+37=29+31	g(60) = 6
E = 66=5+61=7+59= =13+53=19+47= =23+43=29+37	g(66) = 6
E = 68=7+61=31+37	g(68) = 2
E = 198	g(198) = 13

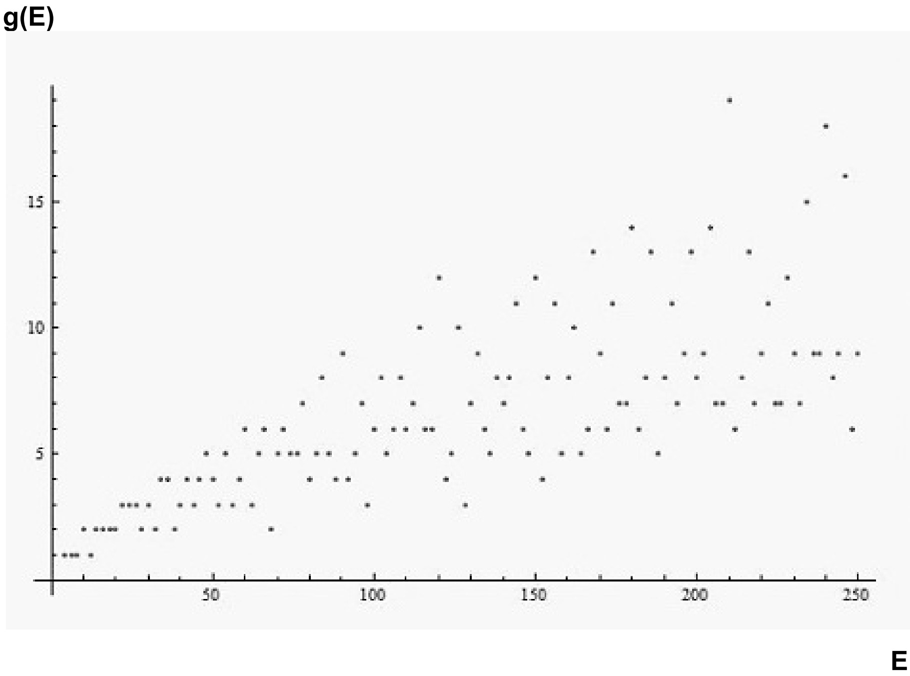


5. ábra
Egy E páros szám két prím összegére való felbontásainak száma, az ún. g(E) Goldbach-függvény, ha $E \leq 60$

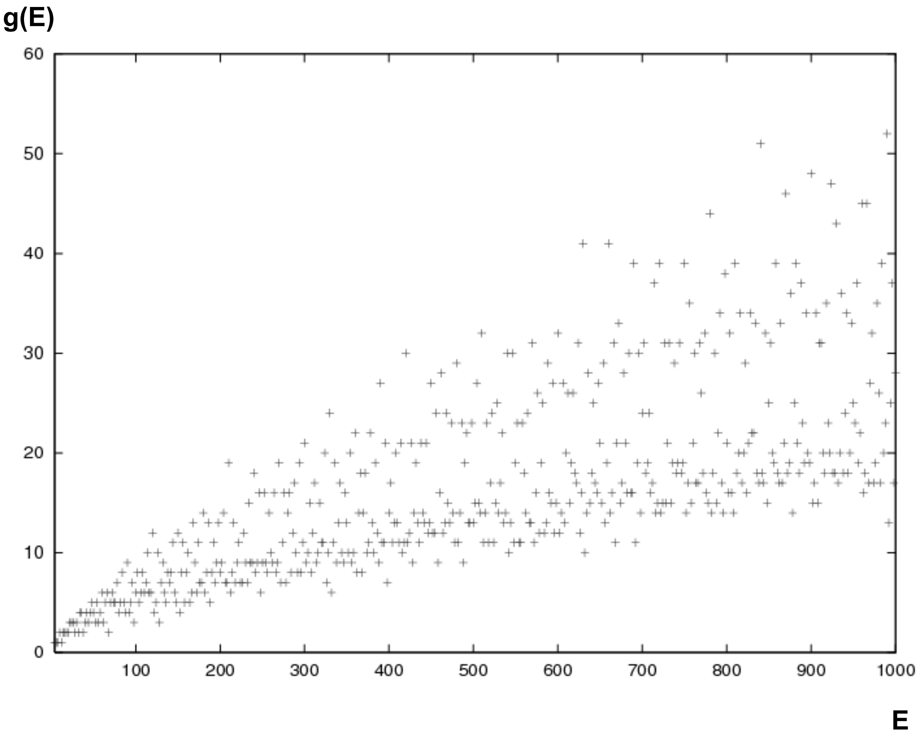
Amint látható, a számok (E) növekedésével nem monoton növekszik a két prím összegére való felbontások g(E) száma. Koordinátarendszerben ábrázolva csak a páros számokhoz rendelhető ordináta-érték; minden páros E számhoz egy pont (egyetlen partíció, g[E]) tartozik. A páratlan E számok esetén $g(E) \equiv 0$. Az így kirajzolódó grafikon az ún. *Goldbach függvény* vagy *„Goldbach-üstökös”* (**5., 6., 7., 8.,** és **9. ábra**), amely a partíciók g(E) számát ábrázolja E függvényében. A grafikont először 1989-ben publikálta két amerikai kutató, *Henry F. Fliegel* és *Douglas S. Robertson,* $E \leq 10^5$-ig.

A Goldbach-partíciók (Goldbach-párok) számában g(E) értékei *szélsőséges eltéréseket* mutathatnak, ha egyik páros számról a szomszédosra lépünk. Pl. 30.030 partícióinak száma 905, míg az egyik szomszédos páros számnak, a 30.028-nak 237, a 30.032 szomszédos párosnak 225 felbontása van. A Goldbach-függvénynek $E \geq 300$ esetén már látható finomszerkezete van és pászmákra, csóvákra hasad fel. $E = 10^6$-nál a grafikon már nagyon jól mutatja az elkülönülő csóvákat (**9. ábra**). Az „üstökös” alsó határa éles, és a $G(E) = e \exp AE^B$ exponenciális függvényt követi, ahol $A > 0$, és $0 < B < 1$.

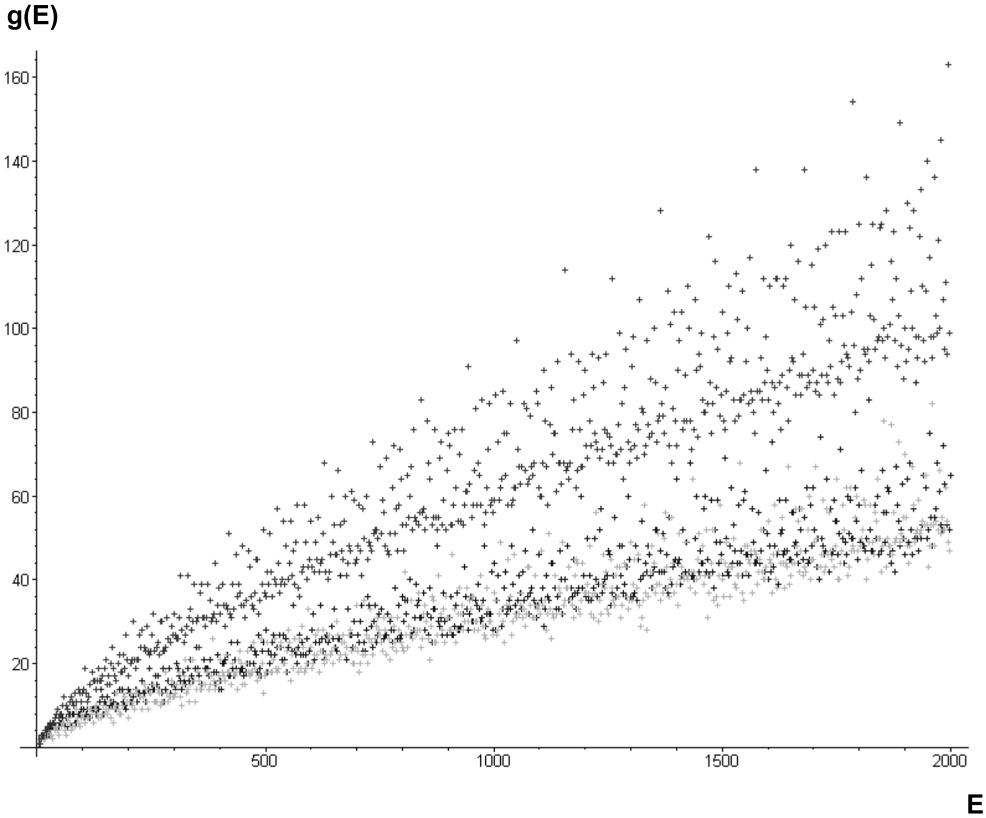
Megjegyzendő, hogy az irodalomban néha találkozhatunk olyan cikkekkel, amelyek az *azonos prímekből álló párokat nem tekintik külön felbontásnak* (pl. 38 = 7+31, de nem veszi tekintetbe a 38 = 19+19 felbontást [31]). Ez abból ered, hogy ha $2n = p + q$, és $p = q$, akkor $2n = 2p$, vagyis *triviális,* hogy egy prím kétszerese (mint páros szám) felbontható két azonos prím összegére. Más cikkek viszont az addíció *sorrendjét* is megkülönböztetik, és nem vesznek tudomást az összeadás kommutatív voltáról, így pl. 10=3+7=7+3, és ezt *kétféle partíciónak* tekintik.



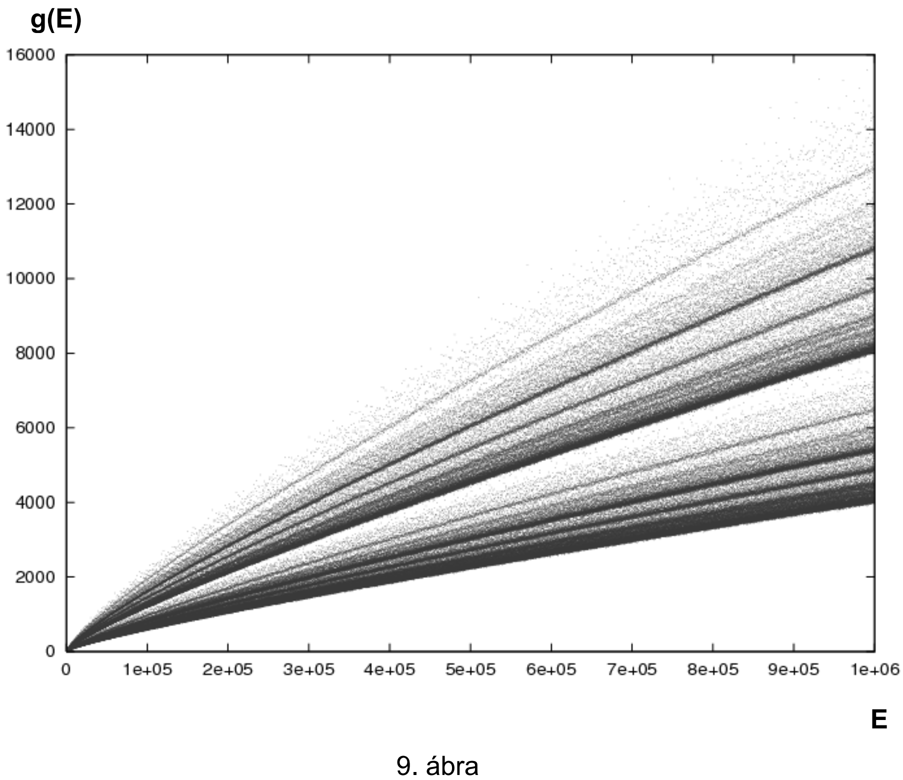
6. ábra
A g(E) függvény, ha E ≤ 250



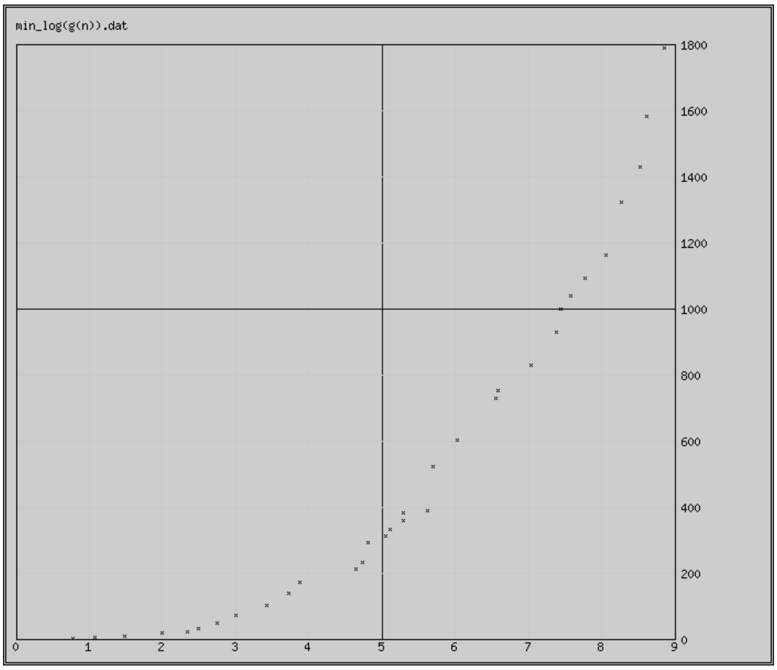
7. ábra
A g(E) függvény, ha E ≤ 1000



8. ábra
A g(E) függvény ha E ≤ 2000



9. ábra
A g(E) függvény egy jól elkülönülő részlete logaritmikus skálán, ha $10^5 \leq E \leq 10^6$



10. ábra
A Goldbach-párokra való minimális felbontásszám, ha $E \leq 10^9$

A Goldbach-partíciók egy másik jellemző ábrázolása [**10. ábra**], ha az abszcisszára a felbontandó E páros számok logaritmusát, az ordinátára egy adott ($\log E_2 - \log E_1$) = $\log(E_2/E_1)$ tartományban a *legkisebb prímpár-felbontás számot,* $g(E)_{min}$-ot visszük fel [33]. Ez a pontsor valójában a Goldbach-üstökös legalsó, éles határát jeleníti meg.

MEGOLDÁSI ERŐFESZÍTÉSEK

Mottó:

„Nonne mathematici veri natique poetae? Sunt, sed quod fingunt, hosce probare decet”
(Vajon nem született és igaz poéták a matematikusok is? Azok, de azt, amit kiagyalnak, bizonyítaniok kell, Leopold Kronecker)

„Essentiae rerum sunt sicut numeri”
(A dolgok lényegei a számok,Gottfried Wilhelm Leibniz)

„Another roof, another proof”
(Ahány ház, annyi bizonyítás, Erdős Pál)

„A matematikus olyan szerkezet, amely a kávéból tételeket készít”
(Rényi Alfréd)

„Butul az öreg, eliramlik a tétel”
(Erdős Pál)

1923-ban két angol számelmélész, *Godfrey Harold Hardy* (1877-1947) és *John Edensor Littlewood* (1885-1977) ún. *„aszimptotikus”* módszerrel bebizonyították, hogy *„egy igen nagy N_0 szám felett minden páratlan szám három prím összege”.*

1931-ben *Lev Genrikovics Snyirelman* (1905-1938), fiatalon elhunyt szovjet matematikus bebizonyította, hogy *„minden természetes szám előáll véges számú prím összegeként”.* 1939-ben Snyirelman becslést is adott erre a „véges” számra, majd bebizonyította, hogy minden $2n \geq 4$ páros szám előáll *kevesebb, mint 300.000 (!) prím összegeként.* Ez – enyhén szólva is – meglepő volt. Snyirelman később bebizonyította, hogy ehhez *legfeljebb 20 prím* is elegendő, majd *7 prímre* redukálódott a küszöb. Ez már valamennyire elfogadható volt, de még mindig nagyon távol állt a Goldbach-sejtés bizonyításától.

1937-ben *Ivan Matvejevics Vinogradov* (1891-1983) szovjetorosz matematikus (**11. ábra**) is bizonyította, hogy *„egy »elegendően nagy« N_0 küszöbszám felett minden páratlan szám előáll, mint 3 prím összege”*, vagyis:

$$(2n + 1) = P_1 + P_2 + P_3 \,,$$
ha $(2n + 1) > N_0$, és N_0 nagy.

Ez a gyenge GC egy *partikuláris* megoldása. Vinogradov eredményéhez trigonometrikus öszszegek ún. „éles becslés”-én keresztül jutott; bizonyítása indirekt volt. Vinogradov azonban nem tudta megmondani, hogy mekkora ez az »elegendően nagy« N_0 szám. Később *Hua Lo-keng* (1910-1985) kínai matematikus lényegesen leegyszerűsítette Vinogradov 1937-es bizonyítását.

1956-ban *Konstantin V. Borodzin,* Vinogradov tanítványa megmutatta, hogy ez az »elegendően nagy« N_0 szám gigantikus:

$$N_0 \geq 3\ \exp(3^{15}) = 3^{14.348.907} \cong e\ \exp(e^{16.573})$$
$$= 3{,}25\times10^{6.846.168}.$$

Ez a szám csaknem 7 millió jegyű. A wGC tehát még nagyon messze volt az igazolástól. Megjegyzendő, hogy Metagalaxisunk kb. 10^{80} nukleonból áll!

1989-ben *Wang Tian-ze* és *Csen Jing-run* – két kínai matematikus – Vinogradov számát $N_0 \geq e^{\left(e^{11,503}\right)} \cong 3{,}33\times10^{43.000}$-ben határozta meg. 2002-ben *Liu Ming-csi* és Wang Tian-ze ezt a küszöböt $N_0 \geq e^{3100} \cong 2\times10^{1346}$-ra csökkentették, amely még mindig egy 1347 jegyű szám.

11. ábra
Ivan Matvejevics Vinogradov (1891-1983)

1936-ban *Giovanni Ricci* (1904-1973) olasz matematikus, (Pármai Egyetem) bebizonyította, hogy *„minden »elegendően nagy« egész szám előáll legfeljebb 67 prím összegeként”.*

1940-ben *N. Pipping* fentieket 10^4-ig numerikusan is igazolta. *A.A Buchstab* és *Yuan Wang* később bebizonyították, hogy a $2n = P + P(7)$ kifejezésben a $P(7)$ –, amely egy hét tényezős prímszorzat – $P(4)$-re redukálható, majd *Enrico Bombieri* (1940-) olasz/amerikai matematikus és Vinogradov – egymástól függetlenül – bebizonyították, hogy $2n = P + P(3)$ lehet.

1947-ben *Rényi Alfréd* (1921-1970) magyar matematikus, *J.V. Linnyik* és Vinogradov tanítványa (**12. ábra**) tovább fejlesztette az ún. *„Linnyik-féle nagy szita”* módszert, és az sGC-vel kapcsolatban általánosságban igazolta, hogy *„minden »elegendően nagy« páros szám egy prím és egy olyan kompozit szám összege, amely legfeljebb ‘k’ darab prím szorzata”,* vagyis:

$$2n = P + (P_1P_2\times\ldots P_k) = P + P(k)\ ,$$

ha *2n* nagy, de a *’k’* tényezőszám kérdéses.

Itt a *P(k)* szimbólum *k darab prím szorzatát* jelöli. Fenti kifejezés az ún. *„gyengített Goldbach-sejtés”.*

12. ábra
Rényi Alfréd (1921-1970)

1950-ben *Atle Selberg* norvég matematikus bebizonyította, hogy $2n = P(2) + P(3)$, vagyis, hogy *minden* (nagy) *páros szám előáll, mint egy olyan összeg, amelynek egyik tagja két prímből, másik tagja három prímből álló szorzat.*

1968-ban *Theodor Estermann* (1902-1992) angol matematikus bizonyította, hogy *„minden »elegendően nagy« páros szám előáll egy prím plusz legfeljebb 6 darab prím szorzataként”,* vagyis:

$$2n = P + P(6), \quad \text{ha } 2n \text{ nagy.}$$

Itt a *P(6)* szimbólum hat darab prím szorzatát jelöli.

1995-ben *Olivier Ramaré* francia matematikus (Lillei Egyetem) bebizonyította, hogy *„minden páros szám előáll legfeljebb hat prím összegeként”* [9]. Még ugyanabban az évben *L. Kaniecki* lengyel matematikus igazolta, hogy ha a Riemann-hipotézis (lásd alább) igaz, akkor *„minden páratlan szám előáll legfeljebb öt prím összegeként”.* Pl.: 25=3+3+3+5+11; 39=2+2+3+3+29 stb.

Paul Stein és Stanisław Ulam fogalmazták meg azt a sejtést, hogy *„minden »elegendően nagy« páros szám felírható, mint két darab (6k + 1) alakú prím összege”.* Megjegyzendő, hogy a (6k ± 1) alakú számok között sok a prím és az ikerprím, továbbá, hogy a (4k ± 1) alakú számok között is igen sok (talán végtelen sok) a prímszám.

1997-ben *Jean-Marc Deshouillers, G. Effinger, Herman J.J te Riele és D. Zinovjev* bebizonyították, hogy *ha az általánosított Riemann-sejtés igaz,* akkor *„minden 5-nél nagyobb páratlan szám három prím összege".* Ez a wGC bizonyítása *„lenne".* Csakhogy a Riemann-hipotézis *máig sem bizonyított* (lásd alább).

A Riemann-sejtés egyike a hét, ún. „millenniumi" problémának, amelyek megoldásáért egy 2000-ben alakult nonprofit alapítvány, a Clay Matematikai Intézet (CMI, Cambridge, MA, USA) egy-egy millió dollárt ajánlott fel. A díjat egy bostoni milliomos üzletember, *Landon T. Clay* által 1998-ban alapított fenti intézet szponzorálja. Clay vagyona több mint 300 millió dollár.

A prímszámok eloszlásával szoros kapcsolatban álló sejtését *Bernhard Riemann* (1826-1866) német matematikus –, akinek a nem-euklideszi geometriával kapcsolatos munkásságára később *Einstein* is támaszkodott – 1859-ben vetette fel egy számelméleti írásában. A Riemann-hipotézis szerint az ún. komplex zeta-függvény *ζ(s)* összes – nem triviális – gyöke ½ valós részű, vagyis $Re(s_i) = ½$. A triviális gyökök a negatív páros számok: *-2, -4, -6…* stb. A sejtés, a többi „nagy sejtéshez" hasonlóan, az idők során kultikussá nőtte ki magát; számos matematikus tette fel az életét megoldására. *John Forbes Nash* [1928-], a *„csodálatos elme", „a Fine Hall fantomja"* (Princeton Egyetem, NJ, USA, közgazdasági Nobel-díj 1994) is megpróbálkozott vele, de eddig sem igazolni, sem cáfolni nem sikerült senkinek [14].

A Riemann-féle komplex zeta függvény:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad s = \sigma + i\tau \qquad \mathrm{Re}(s) = \sigma$$

$$\mathrm{Im}(s) = \tau$$

Ha s > 1, akkor a függvény konvergens, ha s = 1, akkor divergens. A $\zeta(2)$ sor összegezésével a Bernoulli-fivérek nem boldogultak; ez végül Eulernek sikerült 1740-ben:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}645\ldots$$

A sor – lassú konvergenciája miatt – a gyakorlatban nem alkalmas a π sok tizedes jegyre való kiszámítására. Ugyancsak Euler eredménye a fenti sor prímtényezős produktumként való kifejezése is:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=\text{prím}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{p=\text{prím}} \frac{p^s}{p^s-1} =$$

$$= \left(\frac{2^s}{2^s-1}\right)\left(\frac{3^s}{3^s-1}\right)\left(\frac{5^s}{5^s-1}\right)\left(\frac{7^s}{7^s-1}\right)\left(\frac{11^s}{11^s-1}\right)\ldots$$

Ha s = 2, akkor:

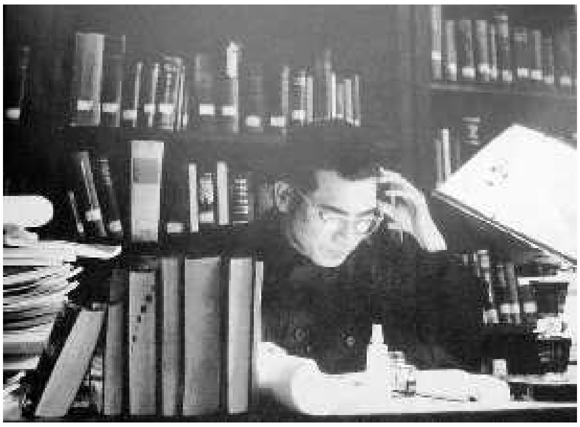
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \prod_{p=\text{prím}} \frac{1}{1-p^{-2}} = \prod_{p=\text{prím}} \frac{p^2}{p^2-1} =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2^2-1}\right)\left(\frac{3^2}{3^2-1}\right)\left(\frac{5^2}{5^2-1}\right)\left(\frac{7^2}{7^2-1}\right)\left(\frac{11^2}{11^2-1}\right)\ldots$$

$$= \frac{\pi^2}{6}.$$

Felmerül a nem teljesen megalapozatlan kérdés; vajon „honnan tudják" a prímek, hogy mennyi a π értéke?

Pintz János (1950-) magyar matematikus (MTA Matematikai Kutatóintézet, Budapest) kimutatta, hogy az sGC alóli kivételek száma –, ha egyáltalán vannak ilyenek – kevés. Azon *N*-nél kisebb páros számok darabszámára, amelyek nem állnak elő két prímszám összegeként, az $f(N^{2/3})$ korlátot adta.



13. ábra
Csen Jing-run (1933-1996)

1973-ban *Csen Jing-run* (1933-1996, **13. ábra**) kínai matematikus (Kínai Akadémia Matematikai Intézete, Peking) *döntő áttörést* hozott a problémában. Közzétette azt a bizonyítását, hogy *„minden »elegendően nagy« páros szám felírható egy prím plusz legfeljebb két prím szorzataként"*, vagyis $2n = P + (P_i \times P_k) = P + P(2)$ alakú. Megengedettek az azonos prímek is. A zárójeles kifejezés a *„semi-prím"* (vagy almost prime =

majdnem prím) nevet viseli, amely két prím szorzatából álló, kompozit szám.

Csen Jing-run eredményét szokás *Csen prímtételnek* nevezni és *(P+P2)* vagy *P(1,2)* formalizmussal is felírni. Pl.: 6=2+(2×2), 8=2+(2×3), 16=7+(3×3), 18=3+(3×5), 60=11+(7×7), 100=23+(7×11), 120=29+(7×13) stb. Csen nagyon közel került a Goldbach-sejtés bizonyításához; prímtételét *Margaret Corbit* (Cornell Elméleti Központ, Ithaca, NY, USA) $\leq 10^9$-ig ellenőrizte. 1997-ben *J.-M.* Deshouillers, *Yannick Saouter* és H.J.J te Riele bebizonyították, hogy Csen prímtétele $\leq 10^{14}$-ig igaz.

*Csen-prím*nek neveznek egy *P* prímet, ha *P + 2* vagy prím (ikerprím-eset), vagy két prím szorzata. 1966-ban Csen bebizonyította, hogy *végtelen sok* Csen-prím létezik, pl.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 … stb. Viszont nem Csen-prímek: 43, 61, 73, 79, 97, 103, 151, 163, 173 …stb.

Rudolf Ondrejka (1928-2001, NJ USA) alkotta meg a következő, csupa Csen-prímből álló bűvös négyzetet, amelynek összegszáma 177 = 3×59 (**14. ábra**):

17	89	71
113	59	5
47	29	101

14. ábra
Mágikus, 3×3-as Csen-prímnégyzet

1999-ben Csen Jing-run GC bizonyításában elért eredményének tiszteletére a kínai posta bélyeget adott ki, amelyen sziluettje és prímtétele látható. Csen reflexiója: *„magas megtiszteltetés, de a továbblépés gondokat jelent”.*

KÍSÉRLETI ELLENŐRZÉS – MUNKÁBAN A SZÁMÍTÓGÉPEK

Mottó:

„Pourquoi faire simple si on peut faire compliqué?”
(Miért legyen valami egyszerű, amikor bonyolult is lehet?)

„A mesterséges intelligencia soha nem pótolhatja a természetes butaságot”
„A legtöbb matematikus eladná a lelkét egy bizonyításért”
(Marcus du Sautoy)

„Minden út jó út, mert valahová vezet”
(Hioszi Tatiosz)

A 20. sz. második felében megjelentek a gyors, elektronikus, digitális, programvezérelt számítógépek, amelyekkel a GC ellenőrzése egyre nagyobb számokig – elfogadható idő alatt – elvégezhető volt. Az alábbi összeállítás mutatja, hogy kik, mikor és meddig igazolták számolással a páros Goldbach-sejtést:

Adolphe Desboves	1885	1×10^4 (kézi)
N. Pipping	1938	1×10^5 (mech.)
Mok-Kong Shen	1964	$3{,}3\times10^7$ (el. gép)
M.L. Stein & P.R. Stein	1965	1×10^8
A. Granville, J.v.d. Lune, Herman J.J te Riele	1989	2×10^{10}
Matti K. Sinisalo	1993	4×10^{11} (IBM)
Jean-M. Deshouillers, H.J.J te Riele, Yannick Saouter	1998	1×10^{14} (Cray)
Jörg Richstein	1999	4×10^{14}
Tomás Oliveira e Silva	2003. 03.	2×10^{16}
Tomás Oliveira e Silva	2003. 10.	6×10^{16}
Tomás Oliveira e Silva	2005. 02.	2×10^{17} (Cray)
Tomás Oliveira e Silva	2005. 12.	3×10^{17}
	2007. 02.	5×10^{17}
	2007. 03.	1×10^{18}
	2008. 02.	$1{,}1\times10^{18}$
	2009. 12.	$1{,}6\times10^{18}$

124 év alatt tehát több mint 14 nagyságrenddel jutottak előre a numerikus ellenőrzéssel. Ez azonban *csak azt igazolja,* hogy az sGC alól $1{,}6\times10^{18}$-ig *nincsen kivétel.* Nem tudhatjuk, hogy ha a számítógépes ellenőrzéssel eljutunk több nagyságrenddel tovább, találunk-e kivételt? Megjegyzendő, hogy H.J.J. te Riele és munkatársai – *véletlenszerű mintavétellel* – ellenőrzést végeztek nagyobb számokig is, de *nem találtak kivételt.* A sejtés általános matematikai bizonyítása vagy cáfolata azonban a mai napig nem sikerült. Több neves számelmélész azt mondta/mondja, hogy a sejtés egzakt bizonyítása teljesen reménytelen (lásd alább).

VÉLEMÉNYEK ÉS KÉTSÉGEK

Mottó:

„Isten létezik, mert a matematika konzisztens, de létezik a Sátán is, mert ezt nem tudjuk bizonyítani”
(Andrè Weil)

Srinivasza Ramanujan (1887-1920), a zseniális hindu matematikus (az angol Hardy felfedezettje és későbbi munkatársa) véleménye az volt, hogy valamilyen nagyon nagy szám felett a

Goldbach-sejtés ellenpéldájára bukkanhatunk, tehát az eredeti sejtés *nem igaz.*

1912-ben *Edmund Landau* (1877-1938) német matematikus azt mondta a Goldbach-sejtésről, hogy az *„a tudomány mai állása szerint megoldhatatlan”.*

A Goldbach-sejtéssel kapcsolatban 1915-ben fordulat következett be, amikor *Jean Merlin* észrevette, hogy a sejtés –, bár közvetett módon, de – összefüggésben van az *ikerprímekkel.* Sajnos korai halála miatt munkáját nem fejezhette be. Ikerprímek azok a prímszámok, ahol két szomszédos prím különbsége kettő; $(P_2 - P_1) = 2$. Pl.: [3;5], [5;7], [11;13], [17;19], [29;31] stb. Hogy az ikerprímek a prímeken belül kivételes helyet foglalnak el, arra *Viggo Brun* (1885-1978) norvég matematikus felfedezése mutatott rá. Azt tudjuk, hogy a prímek reciprokának sora divergens, vagyis, ha p_i az *i-edik* prím, akkor:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+$$
$$+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\ldots\to\infty.$$

A prímszámok reciprokának fenti sora extrém lassan tart a végtelenhez. Ha az első 50 millió tagját tekintjük, még mindig csak < 4 összeget kapunk. A sor 100 tagjának összege 2,099042851…

Brun bebizonyította, hogy az *ikerprímek reciprokának* sora viszont *konvergens;* összege a tiszteletére elnevezett Brun-állandó:

$$B_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{29}+\frac{1}{31}\right)+\ldots\cong$$
$$\cong 1{,}902160583104\ldots$$

G.H. Hardy egy 1921. október 6-án tartott előadásában annak a véleményének adott hangot, hogy *„a Goldbach-sejtés valószínűleg a matematika egyik legnehezebb problémája”.*

Alan Baker Fields-érmes (1970) matematikus (Cambridge Egyetem, UK) ezt mondta: *„Csen bizonyítása végül is az eddigi legjobb eredmény, de valószínűtlen, hogy további eredmény nyerhető valamilyen nagy áttörés nélkül. Sajnos nincsen hasonló nagy ötlet a láthatáron. Ha viszont jön egy nagy ötlet, akkor erre valamit rá lehet, és kell építeni. Nem gondolom, hogy a pénz* (Faber-díj, lásd alább) *ebben jelentős hajtóerőt jelent. Ha az emberek megoldják, akkor ezt nem a pénzért, hanem a kihívásért teszik”.*

A matematika problémáinak egyféle, lehetséges csoportosítása a következő:

(1) *megoldottak* vagy biztosan *megoldhatók,*

(2) nagyon *nehezen*, de *megoldhatók,*

(3) *talán megoldhatók,*

(4) mai ismereteink szerint *megoldhatatlanok.*

Kurt Gödel (1906-1978) osztrák/amerikai matematikai logikus leghíresebb eredménye az 1931-ben megfogalmazott, ún. *„nemteljességi tétel”*, amely azt állítja, hogy *„minden önmagában ellentmondásmentes (konzisztens) axiómarendszer, amely tartalmazza a természetes számok axiómarendszerét, nem teljes, azaz vannak eldönthetetlen problémái”.* Más szóval: *„minden – nem semmitmondó – axiómarendszer alapján meg lehet fogalmazni olyan állítást, amely az adott axiómarendszer keretei között eldönthetetlen; sem be nem bizonyítható, sem meg nem cáfolható* (nem verifikálható és nem falszifikálható)”. Ebből az következik, hogy ha egy matematikai sejtés *igaz,* az még *nem jelenti* azt, hogy az adott axiómarendszeren belül *bizonyítható* is.

Alan Mathison Turing (1912-1954) brit matematikus, a modern számítógép-tudomány egyik nagy alakja volt. Nevéhez fűződik a németek Enigma-kódjának megfejtése (1943). Azt az állítást fogalmazta meg, hogy *„a priori”* (eleve) *nem eldönthető, hogy egy matematikai állítás vagy sejtés bizonyítható-e vagy sem.*

Gödel és Turing eredményeinek tükrében *lehetséges*, hogy a Goldbach-sejtés a *megoldhatatlan* kategóriába tartozik. Ennek a félelemnek ellentmond a Nagy Fermat sejtés, amelynek bizonyítása 350 évig váratott magára. Alátámasztja viszont az aggodalmat a Gödel-tétel, amely ebben az esetben (is) áthághatatlan korlátot jelent(het). Gödel tételéhez kissé hasonló a fizikában a Heisenberg-féle határozatlansági reláció (1927), amely szerint a kanonikusan konjugált változópárok egyidejű mérésének hibaszorzata alulról korlátos, pl.: $\Delta x_i\ \Delta p_i \geq \hbar/2$ és $\Delta E\ \Delta t \geq \hbar/2$. Vagyis nem lehetséges egyszerre, tetszés szerinti pontossággal helyet és impulzust, energiát és időt stb. mérni.

A Goldbach-sejtés egzakt matematikai bizonyítása – klasszikus esetben – három úton lehetséges: *algebrai, analitikus* és *geometriai.* Miután megjelentek a nagy teljesítményű, elektronikus számítógépek, elvileg megnyílt a negyedik út, a *gép,* és az erre alapozott *kísérleti matematika* (experimental mathematics). Ez az út pl. a négyszín-sejtés „bizonyításánál” (1976) jól működött. A komputer pl. *képes lehet* egy nagy páros számról kimutatni, hogy nem állítható elő, mint két prím összege – ezzel megdőlne a GC.

1982-ben *Douglas B. Lenat* komputer tudós „Automata Matematikusa” újra *felfedezte* a Goldbach-sejtést. Ez volt az első demonstráció arra, hogy mesterséges intelligencia (Artifical Intelligency, AI) képes tudományos felfedezést produkálni.

2000. március 20-án *Tony Faber,* a Faber & Faber brit könyvkiadó cég tulajdonosa (az *„Uncle Petros and Goldbach's Conjecture”* c. könyv eredeti kiadója) egymillió dolláros díjat tűzött ki a Goldbach-sejtés két éven belüli megoldására. *„Boldog lennék, ha valaki megnyerné”* – mondta. A díj kiírásakor az volt a vélemény, hogy a világon legfeljebb 20 ember lehet esélyes a díjra. Megjegyzendő, hogy a díjra csak 18 év feletti, brit vagy amerikai állampolgár lehetett jogosult. Érdemi megoldás nem érkezett; a probléma továbbra is nyitott maradt. Doxiadis könyve 2004-ben az Európa Könyvkiadó gondozásában, magyarul is megjelent *„Petrosz bácsi és a Goldbach-sejtés”* címmel.

Apostolos Doxiadis (1953-) „Uncle Petros and Goldbach's Conjecture” c. könyve 15 nyelvre lefordított bestseller lett. Az ausztrál szerző Athénban nevelkedett, a Columbia Egyetemen matematikát végzett, később irodalommal és színházzal foglalkozott. Regényhőse, *Petrosz Papakrisztosz* (Petrosz bácsi) megszállott matematikus, kicsit nevetséges, öntelt, bizalmatlan és hóbortos, csodabogár szobatudós, aki a Goldbach-sejtés bizonyítására tette fel az életét. Családja véleménye, hogy Petrosz bácsi „kész csődtömeg”. A könyv szerint az 1910-es évek végén – matematikus zseniként – Cambridge-be kerül, ahol együtt dolgozik a kor legkiválóbb számelméleszeivel (G.H. Hardy, *J.E. Littlewood,* S. Ramanujan), majd kapcsolatba kerül *C. Charatheodory*-val, A. Turing-gal és K. Gödel-lel is. Berlinben egyetemi katedrát kap. Később visszahúzódva, magányosan él, kutatásait titkolja, nehogy ellopják, és csak matematikus unokaöccsének fedi fel, hogy a GC-témán dolgozik. A sejtés megoldását elemi módszerekkel kísérli meg; álmaiban az egész számok életre kelnek (pl. 2^{99} és 2^{100}, mint gyönyörű ikerlányok), és személyes, jó barátaivá válnak. Felfogása, számmiszticizmusra való hajlama és titkolózása a pitagoreusi iskolát idézi. Amikor végre eldönti, hogy fontos részeredményeit publikálja, kiderül, hogy előtte ezt már mások megtették. Petrosz összeomlik, majd amikor értesül Gödel nemteljességi tételéről is, és világos lesz számára, hogy kitűzött célja talán megoldhatatlan, megőrül. Egyik éjszaka azt hiszi, hogy mégis megoldotta a GC problémát, de mielőtt közölhetné unokaöccsével a (vélt) megoldást, egy szélütés végez vele, és titka sírba száll. [1]

Amikor Doxiadist megkérdezték; mi a véleménye a Faber-díjról, azt mondta: *„Igen, tudom, hogy Andrew Wiles hét évet töltött el a Nagy Fermat Sejtés bizonyításával. De ha valaki Wiles bizonyítási bejelentése előtt azt mondta volna; »azt gondolom, hogy néhány éven belül megoldom«, őrültnek tartották volna. Néha a dolgok váratlanul bukkannak elő”.*

Ian Stewart (1945-) Faraday-érmes (1995) matematikus (University of Warwick, Coventry, UK), a világ egyik legismertebb matematika-ismeretterjesztője – ugyancsak utalva a Faber-díjra – optimistább: *„Azt gondolom, hogy néhány matematikust elkápráztat egymillió dollár. Helyrebillenthetné az egyensúlyukat”.*

Martin Gardner (1914-) amerikai matematikus mondta: *„Azt hiszem, ha száz év múlva felébrednék, kíváncsi lennék arra, hogy mi minden újat fedeztek fel a matematikában és a fizikában. Bebizonyították-e a Goldbach-sejtést? A Riemann-hipotézist?”*

2007-ben megkérdezték *Terence Chi-Sen Tao* (1975-) Fields-érmes ausztrál/amerikai matematikust (University of California), hogy szerinte igaz-e a GC? Tao válasza: *„Természetesen igaz; a numerikus eredmények meggyőzőek. De hogy bizonyítható-e, az már más kérdés”.*

Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955) német származású amerikai matematikus még 1912-ben a következőket mondta: *„Vajon tényleg igaz, hogy minden páros szám két prím összege? Úgy tűnik, hogy ennek megmutatása túl van jelenlegi matematikánk teljesítőképességén. A prímszámok nagyon ravasz fickóknak bizonyulnak”.*

IRODALOM

[1] Aposztolosz Doxiadisz: Petrosz bácsi és a Goldbach-sejtés. *Európa Könyvkiadó Kft, Budapest (2004).*
[2] Simon Singh: A nagy Fermat-sejtés. *Park Könyvkiadó, Budapest (1999).*
[3] S.K. Kapoor: Proof of Goldbach Theorem.
[4] S.K. Kapoor: *Vedic Mathematics Newsletter, New Delhi, India, Issue 10 (2000).*

[5] Jagadguru Swami Sri Bharati Krsna Tirthaji Maharaja: Vedic Mathematics. *Motilal Banarasidass Publishers, New Delhi, India (1965).*

[6] *Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 4, pp 4-6.*

[7] On the Goldbach-Euler Theorem Regarding Prime Numbers. *The Mathematical Papers, Vol. IV, pp 734-73, Chelsea Publishing Co, New York, USA.*

[8] Godfrey Harold Hardy: *Mathematical Society of Coppenhagen.*

[9] On Schnirelmann's Constant. *Ann. Sc. Norm. Super 22, Vol. 4, pp 645-706 (1995).*

[10] P.H. Fuss: Correspondance mathématique et physique de quelquescélébres géométres du XVIIIéme siécle, tome I. *St. Petersburg (1843).*

[11] A. Desboves: *Nouv. Ann. Math. 14, p 293 (1855).*

[12] Rudolf Knjzek: About the maximum lenght of covered blocks.

[13] www.wordiq.com/definition/Goldbach's_conjecture

[14] Sylvia Nasar: Egy csodálatos elme. A Nobel-díjas matematika géniusz, John Nash élete. *Gabo Könyvkiadó és Kereskedelmi Kft., Budapest (2002).*

[15] Paul Hoffman: A Prímember. Erdős Pál kalandjai a matematika végtelenjében. *Scolar Kiadó, Budapest (1999).*

[16] Dr Szendrei János: Algebra és számelmélet. *Tankönyv (2006).*

[17] Freud–Gyarmati: Számelmélet. *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2000)*

[18] Klopfer Ervin: A Goldbach-sejtés története. *Computer Panoráma XVI. évf. 2005/3, CD/DVD melléklet, E-book, pp1-23 (2005. március)*

[19] Paul Truman: The Goldbach Conjecture. *Exceter College, Oxford (2005)*

[20] L.E. Dickson: History of the Theory of Numbers. *Vol. 1, New York (1934)*

[21] Richard K. Guy: Unsolved Problems in Number Theory. *Springer Verlag*

[22] http://home.fazekas.hu/~kovibalu/phpszakkor/vargusz/prim.php

[23] http://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach's_conjecture

[24] http://www.math.dartmouth.edu/~euler/correspondence/letters/OO0765.pdf (Lettre XLII)

[25] http://www~groups.dsc.st-and.ac.uk/~history/Indexes/G.html

[26] http://www.fortunecity.com/emachines/e11/86/tourist2b.html

[27] http://www.people.ex.ac.uk/pt224/Goldbach.pdf

[28] http://plus.maths.org/issue2/xfile/index.html

[29] http://learning.physics.iastate.edu/hodges/mm-1.pdf

[30] Yuan Wang: The Goldbach Conjecture, *Second Edition, Series in Pure Mathematics, Volume 4, World Scientific.*

[31] http://plus.maths.org/issue2/xfile/. Mathematical mysteries: the Goldbach conjecture. (A Goldbach Calculator).

[32] http://www.math.com/students/calculators/source/prime-number.htm

[33] http://www.petrospec-technologies.com/Herkommer/goldbach.htm